CHAPITRE 1

VOCABULAIRE DES ENSEMBLES

LOGIQUE

1 Eléments et ensembles

En mathématique, on précise ce qui est admis (le moins de choses possibles) et ce que l'on démontre (le plus de choses possibles).

Afin de faciliter l'apprentissage des différentes notions, pour ce qui est admis, on distingue dans le vocabulaire

- les **conventions** relatives aux ensembles
- les **règles** de la logique
- les **axiomes** pour la géométrie
- les **structures** pour l'algèbre

Rappel

1 Le plan $\mathbf{P}$ est un ensemble de points $\{A, B, C, ..., A_1, A_2, ...\}$. Un point B est un élément du plan. On écrit $B \in \mathbf{P}$, ce qui se lit aussi "le point B appartient au plan $\mathbf{P}$ ".

2 $\mathbb{N}$ est l'ensemble des nombres naturels $\{0, 1, 2, 3, ...\}$ et 1 est élément de cet ensemble. $1 \in \mathbb{N}$.

3 Un point n'est pas un nombre.

On dispose d'objets 1, 2, $\mathbf{P}$, A, $\mathbb{N}$, ... que l'on écrit à gauche ou à droite de $\in$.

Questions

A-t-on $1 \in \mathbf{P}$; $A \in \mathbb{N}$; $1 \in A$; $A \in 1$; $2 \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$; $0 \in \{0, 1, 2, 3, ...\}$; $2 \in \{3, -2, -3\}$; $1 \in \{2, \{1\}, 3\}$?

Pour fixer l'usage du symbole $\in$, on pose la convention suivante.

CONVENTION 1 pour $\in$ (symbole d'appartenance)

1 L'objet à gauche de $\in$ se retrouve sans modification à droite entre les deux accolades et, si nécessaire, précédé ou suivi d'une virgule.

2 On n'a jamais $a \in a$.

Définition 1 L'objet à gauche de $\in$ s'appelle **élément** et l'objet à droite de $\in$ s'appelle **ensemble**.

<u>Commentaires</u>

1 La convention 1 exprime le fait qu'un **ensemble** est **donné en extension**, c'est-à-dire par l'écriture de ses éléments.

2 $a \in A$ si et seulement si a est dans la "liste" A.

3 Il est d'usage de désigner un ensemble par une majuscule, mais pas pour les points et les droites du plan.

4 On n'a pas le droit d'écrire le même objet des deux côtés de $\in$. Autrement dit, un objet n'est pas élément de lui-même et on n'a pas un ensemble de tous les ensembles.

5 $1 \in \{1\}$ est permis; $1 \in 1$ n'est pas permis; $\{1\} \in \{\{1\}\}$ est permis; $\{1\} \in \{1\}$ n'est pas permis.

Exercices

1 *Est-ce vrai ou faux?*

$2 \in \mathbf{N}$; $3 \in \{a, 3, 5\}$; $3 \in \{3, a, 5\}$; $\mathbb{N} \in \mathbf{P}$; $6 \in \{6\}$; $2 \in \{1, 2\}$; $A \in \{A\}$; $A \in \{A, B, C\}$; $\{1\} \in \{3, \{1\}, \{2\}\}$; $1 \in \{1, 1, 2, 3\}$; $2 \in \{3, \{1\}, \{2, 1\}\}$; $\heartsuit \in \{\heartsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \clubsuit\}$.

2 *Peut-on écrire:* $\{1, 2\} \in \{1, 2\}$; $\mathbf{N} \in \mathbb{N}$?

3 *Si* $a \in B$ *et* $B \in C$ *peut-on en déduire que* $a \in C$?

4 *Comment choisir* a *si* $8 \in \{15, a, 16\}$; b *si* $b \in \{18, 19\}$; c *et* d *si* $c \in \{1, d, 5\}$?

Rappel

Une droite d du plan **P** est un ensemble de points (au moins deux) et tous les points de la droite sont des points du plan. On note $d \subset \mathbf{P}$ et l'on dit que la droite est un sous-ensemble du plan **P**. On écrit **D** pour l'ensemble des droites, alors une droite d est un élément de **D**. Tous les points du plan ne sont pas sur une même droite.

CONVENTION 2 pour $\subset$ (symbole d'inclusion)

Pour $\subset$, tout ce qui est à gauche entre les deux accolades se retrouve sans modification à droite entre les deux accolades.

Définition 2 L'objet à gauche de $\subset$ s'appelle ensemble, ou **sous-ensemble**, ou **partie** et l'objet à droite s'appelle **ensemble**.

Commentaires

1 Il faut distinguer les rôles que les accolades jouent dans l'écriture. $\{1, 2\} \subset \{1, 2, 3\}$ est vrai; $\{\{1\}, 1\} \subset \{1, 2\}$ est faux. On a aussi $\{1, 1\} \subset \{1\}$; $\{1, 1, 2, 3, 3\} \subset \{1, 1, 2, 3, 4\}$ et $\{1, 2, 3\} \subset \{1, 2, 3, 4\}$; $\{A, A, A\} \subset \{A, A, B, C\}$ et $\{A\} \subset \{A, B, C\}$.

2 **On écrit $A \subset B$ si pour tout $x \in A$ on a aussi $x \in B$.** Si l'on note A l'ensemble $\{1, 2, 3\}$ et $A \subset B$, on peut aussi écrire $1 \in B$, $2 \in B$ et $3 \in B$.

Exercice

5 *Est-ce vrai ou faux?*

$\{1, 2\} \subset \{0, 1, 2, 4\}$; $\{1, 2\} \subset \{1, 2\}$; $\{a\} \subset \{a, b\}$; $d \subset \mathbf{P}$; $\mathbf{P} \subset \mathbb{P}$; $\mathbf{N} \subset \mathbf{N}$; $\mathbf{D} \subset \mathbf{P}$; $d \in \mathbf{P}$; $\mathbf{D} \in \mathbb{P}$.

6 *Si l'on note* A *l'ensemble* $\{1, 2, 3\}$, B *l'ensemble* $\{a, b, c\}$ et C *l'ensemble* $\{A, B\}$.

a) Est-ce vrai ou faux? $1 \in A$; $1 \subset A$; $\{1\} \subset A$; $B \in B$; $B \subset C$; $b \in B$; $A \subset A$; $c \in C$; $1 \in C$; $2 \subset C$; $\{3\} \subset C$; $A \in B$; $a \subset B$; $\{a, b\} \in C$; $\{a, b\} \subset C$.

b) Combien d'exercices peut-on envisager avec les lettres A, B, C *si l'on utilise* $\in$? *Et si l'on utilise* $\subset$? *Dire si les écritures envisagées sont correctes.*

c) Donner quelques sous-ensembles de B *et quelques parties de* C.

2 Pour l'usage de = et Ø

Rappel

Si l'on a deux points distincts A et B et deux droites d_1 et d_2 passant par ces points, alors $d_1 = d_2$, les deux droites, c'est-à-dire les deux ensembles de points, sont égales, elles ont les mêmes éléments.

CONVENTION 3 pour l'égalité des ensembles

On utilise $A = B$ pour abréger $A \subset B$ et $B \subset A$.

Exercices

Un théorème est un énoncé vrai qu'il faut démontrer.

On démontre un théorème en écrivant l'hypothèse, la thèse et la démonstration. On trouve l'hypothèse en disant "si" , la thèse en disant "alors" et on démontre en se servant des conventions.

7 *Démontrer d'abord que* $\{a, b, c\} = \{a, c, b\}$. *On dit que l'ordre des éléments n'intervient pas dans l'écriture d'un ensemble donné en extension.*

Démontrer aussi que l'on a $\{a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n\} = \{a_1, a_3, a_2, \ldots, a_n\}$.

8 *Théorème:* $a \neq \{a\}$: *un objet est différent de l'ensemble qui le comprend comme unique élément. (On démontrera avec le tiers exclus: si* $a = \{a\}$, *avec la convention 3 puis la convention 2, on obtient une contradiction.)*

9 *Est-ce vrai ou faux?* $\{1\} \subset \{1, \{1\}\}$; $1 \in \{1, \{1\}\}$; $\{1\} \in \{1\}$; $\{1\} \in \{\{1\}\}$.

10 *Comment choisir:* a *si* $\{1, a, 2\} = \{1, 2, 3\}$; b *si* $\{1, b, 2\} = \{1, 2\}$; c *si* $\{1, 2, c\} = \{1, 3\}$?

Rappel

Si l'on a deux droites d_1 et d_2 strictement parallèles, alors elles n'ont aucun point commun. On dit que les droites sont disjointes. L'ensemble des points communs est l'ensemble vide.

Pour préciser l'usage de l'ensemble vide, noté $\varnothing$ ou $\{\ \}$, on pose la convention suivante.

CONVENTION 4 pour l'ensemble vide

On admet que l'on a un objet $\varnothing$, appelé ensemble vide, tel que $\varnothing$ ne figure jamais seul à droite de $\in$ et $\varnothing$ peut toujours figurer à gauche de $\subset$.

Exercices

11 *Démontrer que les propositions suivantes sont vraies.*
$\varnothing \subset \varnothing$; $\varnothing \in \{\varnothing\}$; $\varnothing \subset \{\varnothing\}$; $\varnothing \subset \{1, 2\}$; $\varnothing \neq \{\varnothing\}$; $\{\varnothing\} \subset \{\varnothing\}$. $\varnothing \in \varnothing$ *est une proposition fausse, de même que* $\{1, 2\} \subset \{\ \}$.

12 *Théorème.* $\varnothing$ *est unique. (supposer qu'il y a deux ensembles vides* $\varnothing_1$ *et* $\varnothing_2$ *et prouver qu'ils sont égaux)*

13 *Théorème.* $\varnothing$ *est sous-ensemble de tout ensemble donné.*

14 *L'ensemble vide peut-il être un élément?*

3 Quelques règles de logique

Définition 3 Un **énoncé** est un assemblage de symboles.

Définition 4 Une **proposition** est un énoncé ou bien vrai ou bien faux. On dit que la valeur logique de la proposition est V ou F.

Définition 5 Un **théorème** est une proposition vraie que l'on démontre.

Exercice 15

Est-ce un énoncé, est-ce une proposition? $2 \in \mathbf{N}$; $2 \in A$; $x \in \mathbf{N}$; $2+2 = 5$; $x = 4$; $x^2 \geq 0$; $2y^2+1 \geq 1$; $d \in \mathbf{P}$; $d \subset \mathbf{P}$; $\mathbf{N} = \mathbf{P}$; $\mathbf{D} = \mathbf{P}$; *il pleuvra demain; je mens; lundi est un jour de la semaine.*

Pour la logique, on admettra quatre règles dont voici la première.

Règle 1

Pour le connecteur à une place "non",
si "p" est une proposition vraie, alors "non p" est une proposition fausse;
si "p" est une proposition fausse, alors "non p" est une proposition vraie.

p	nonp
V	F
F	V

Exercices

16 Démontrer à l'aide d'une table que "p" et "non (non p)" ont même valeur logique.

17 Si "p" est la proposition "un rectangle est un parallélogramme", quelle est sa négation?
Si "q" est la proposition "un losange est un cercle", qu'est-ce que "non q" ?

18 *Peut-on envisager des connecteurs à une place autre que le connecteur "non" ? Quelles seraient leurs tables?*

Un exemple

Si pour un voyage, il faut un billet de train p et un billet de bateau q, le voyage peut avoir lieu s'il est vrai que l'on a p et s'il est vrai que l'on a q. Le voyage ne peut pas avoir lieu si l'on a "pas p" ou "pas q".

Règle 2

Pour le connecteur à deux places "et", on admet la table de vérité suivante

p	q	p et q
V	V	V
F	V	F
V	F	F
F	F	F

Exercices

19 *Est-ce vrai ou faux?*

a) "(10 est divisible par 5) et (10 est divisible par 2)"

b) "(15 est multiple de 3) et (7 est divisible par 3)"

20 *Démontrer avec une table que "p et q" a même valeur logique que "q et p".*

21 *Faire une table de vérité pour "(p et q) et r" et donner un exemple avec "divisible" qui illustre cette table.*

22 *Si l'on avait quatre propositions p, q, r, s, combien d'entrées seraient nécessaires pour construire une table de vérité avec "et" ? Avec "non" et "et" ?*

Un exemple

Si un voyage peut s'effectuer en train ou en bateau, avec p pour le billet de train et q pour le billet de bateau, le voyage peut avoir lieu si l'on a p ou si l'on a q. Le voyage n'a pas lieu si l'on a "pas p" et "pas q".

Règle 3

Pour le connecteur à deux places "ou", on admet la table de vérité suivante

p	q	pouq
V	V	V
F	V	V
V	F	V
F	F	F

Exercices

23 *Est-ce vrai ou faux?*

a) (14 est divisible par 7) ou (14 n'est pas divisible par 7)

b) (6 est multiple de 3) ou (6 est multiple de 2)

c) (un gaz est un liquide) ou (le fer est un métal)

d) (une droite est un point) ou (le plan est l'ensemble vide)

24 *Démontrer que "q ou p" a même valeur logique que "p ou q".*

25 ***Théorèmes*** *Donner une table de vérité pour:*

a) non (p et q), puis pour (non p) ou (non q)

b) non (p ou q), puis pour (non p) et (non q)

c) p et (q ou r), puis pour (p et q) ou (p et r)

d) p ou (q et r), puis pour (p ou q) et (p ou r)

Enoncer en français les théorèmes établis et illustrer ces résultats à l'aide d'exemples.

26 *Nier les propositions:* *a)* $(A \in \mathbb{P}$ et $1 \in \mathbb{N})$ *b)* $(A \in d$ ou $A \notin d)$.

27 *Pour ouvrir un coffre à deux serrures, il faut la clef A et la clef B. Que dire des clefs si l'on n'a pas pu ouvrir le coffre?*

28 *Donner la table de vérité pour "(non p) ou q".*

Un exemple pour l'implication

p est la proposition "j'ai l'appendicite" et q la proposition "je me fais opérer". On envisage les quatre cas suivants.

Si j'ai l'appendicite alors je me fais opérer (et je reste en **Vie**).
Si je n'ai pas l'appendicite alors je me fais quand même opérer (et je reste en **Vie** car je suis prévoyant).
Si j'ai l'appendicite alors je ne me fais pas opérer (et je suis **Foutu**).
Si je n'ai pas l'appendicite alors je ne me fais pas opérer (et je reste en **Vie**).

On constate que la seule des quatre situations qui est tragique correspond au cas dans lequel "j'ai l'appendicite et je ne me fais pas opérer", c'est-à-dire "p et (non q)".

Cet exemple illustre une nouvelle proposition appelée **implication**, construite avec "si ... alors ...".
Si j'ai l'appendicite, alors je me fais opérer. (sinon...)

"Si p alors q" est noté **"$p \Rightarrow q$"** qui se lit **"p implique q"**. On obtient un nouveau connecteur à deux places et l'on peut donner une table de vérité pour ce connecteur "implique" rendant compte du fait que l'implication est fausse dans le seul cas où p est vrai et q est faux.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
F	V	V
V	F	F
F	F	V

Par ailleurs, ayant remarqué que la seule des quatre situations qui est tragique est le cas "p et (non q)", il faut "non(p et (non q)" vrai, c'est-à-dire "(non p) ou q" vrai pour rester en bonne santé.

Si l'on compare les tables de vérité de "$p \Rightarrow q$" et de "(non p) ou q", on peut alors donner la définition suivante.

Définition 6 La proposition "$p \Rightarrow q$" abrège "(non p) ou q".

Exemples

Si x est pair, alors x est divisible par 2 s'écrit $(x = 2n \text{ et } n \in \mathbf{N}) \Rightarrow (\frac{x}{2} \in \mathbf{N})$.

Dans la géométrie plane, si un point est sur une droite, alors ce point est dans le plan s'écrit $(A \in d) \Rightarrow (A \in \mathbf{P})$. On écrit aussi $A \in d \Rightarrow A \in \mathbf{P}$.

Exercices

29 Donner une table pour la négation de " $p \Rightarrow q$ ".

30 Donner la négation de "(non p) ou q"

31 Donner les négations de:

a) x *divisible par 15* $\Rightarrow$ x *divisible par 3*

b) x *carré* $\Rightarrow$ x *rectangle*

c) x *triangle équilatéral* $\Rightarrow$ x *triangle isocèle*

d) x *divisible par 2 et 3* $\Rightarrow$ x *divisible par 6*

e) x *divisible par 2 et 3* $\Rightarrow$ x *divisible par 7*

f) x *divisible par 10* $\Rightarrow$ x *divisible par 2 et par 5*

Définition 7 Si "$p \Rightarrow q$", alors la proposition "$q \Rightarrow p$" s'appelle la **réciproque** de la précédente.

Définition 8 "$p \Leftrightarrow q$" est une abréviation de "$p \Rightarrow q$" et "$q \Rightarrow p$". On dit "p si et seulement si q" ou "si p alors q et réciproquement". On dit aussi que les deux **propositions** sont alors **équivalentes**.
"$p \Rightarrow q$" est dite **implication directe** (condition nécessaire); "$p \Leftarrow q$" est dite **implication réciproque** (condition suffisante).

Définition 9 Si "$p \Rightarrow q$" alors "non $q \Rightarrow$ non p" s'appelle **contraposée** de l'implication "$p \Rightarrow q$".

Exercices

32 Ecrire les contraposées et les négations des implications suivantes.

a) $3 \in \mathbb{N} \Rightarrow \mathbb{N}$ *est un ensemble;*

b) un cercle est un ensemble de points $\Rightarrow$ *un cercle est inclus dans le plan;*

c) x *divisible par 14* $\Rightarrow$ x *multiple de 7.*

33 Ecrire les contraposées des contraposées de l'exercice 32.

34 Pour chacune des cinq implications suivantes, dire si l'implication, sa réciproque, sa contraposée et sa négation sont vraies ou fausses.

a) s'il pleut, alors je prends mon parapluie;

b) s'il pleut, alors il neige;

c) si l'on donne un segment, alors on ne donne pas un triangle;

d) si je n'ai pas la moyenne, alors je ne suis pas promu;

e) si un nombre est premier, alors il n'est pas pair.

35 Donner la table de vérité pour la contraposée d'une implication.

L'exercice 35 permet de démontrer le théorème suivant.

THEOREME 1	Une implication et sa contraposée ont même valeur logique.

THEOREME 2	Loi du syllogisme Si "$p \Rightarrow q$" et "$q \Rightarrow r$" alors "$p \Rightarrow r$".

Rappel

Il existe des énoncés qui ne sont pas des propositions. Par exemple: " $x = 3$ " est un énoncé ni vrai ni faux.

" Il existe un nombre x dans $\mathbf{R}$ tel que $x = 3$ " est une proposition vraie.
On écrit: " $\exists\, x \in \mathbf{R} \quad x = 3$ ".

" Pour tout x dans $\mathbf{R}$, on a $x = 3$ " est une proposition fausse.
On écrit: " $\forall\, x \in \mathbf{R} \quad x = 3$ ".

Les **quantificateurs universel $\forall$ et existentiel** $\exists$ permettent de transformer certains énoncés en propositions.

On admet, pour la négation des quantificateurs, la règle suivante.

Règle 4

Si $x \in A$ et $p(x)$ est un énoncé contenant x, alors la proposition ($\exists\, x \in A \quad p(x)$) se nie ($\forall\, x \in A$ non $p(x)$).

Exercices

36 Traduire ces phrases en français et donner leur négation.

$\exists\, x \in \mathbf{N} \quad \frac{x}{3} \in \mathbf{N}$

$\exists\, x \in \mathbf{N} \quad \frac{x}{2} \in \mathbf{N}$ et $\frac{x}{3} \in \mathbf{N}$

$\exists\, x \in \mathbf{N} \quad \frac{x}{2} \in \mathbf{N}$ ou $\frac{x}{3} \in \mathbf{N}$

$\exists\, A \in \mathbf{P} \quad A \notin d$

37 Transformer: non$(\forall x \in A \ \text{non}\, p(x))$; non$(\forall x \in A \ \ q(x))$.

38 Est-ce vrai ou faux? $\forall x \in \mathbf{N} \ \ \exists \{k, n\} \subset \mathbf{N} \ \ x = k \cdot n$; $\forall A \in \mathbf{P}\ \exists d \in \mathbf{D} \ \ A \notin d$; $\exists A \in \mathbb{P}\ \forall d \in \mathbb{D} \ \ A \in d$; $\exists A \in \mathbf{P}\ \exists d \in \mathbf{D} \ \ A \in d$.

39 Donner la négation des propositions suivantes:
$\forall x \in \mathbf{Z} \ \ x \geq 0$; $\forall x \in \mathbf{N} \ \ x \geq 0$; $\forall x \in \mathbf{Z}^* \ \ x^2 > 0$; $\forall x \in \mathbf{N} \ \ x + 3 = 8$.

4 Pour la construction des ensembles

Définition 10 Etant donné un objet, l'ensemble admettant cet objet comme unique élément se nomme **singleton.**

Définition 11 Etant donnés deux objets distincts, l'ensemble admettant exactement ces deux objets comme éléments se nomme **paire.**

Définition 12 Etant donné un ensemble A, l'ensemble dont les éléments sont exactement les sous-ensembles de A se nomme **ensemble des parties** de A et se note $\mathcal{P}(A)$.

Exercices

40 Démontrer avec la convention 4 que l'on a au moins un singleton et avec la convention 3 que ce singleton est unique.

41 Démontrer que l'on a au moins une paire. Construire deux paires distinctes avec les conventions 3 4 et 5.

42 *Ecrire* $\mathcal{P}(A)$, $\mathcal{P}(B)$ *et* $\mathcal{P}(C)$ si $A = \{1, 2\}$, $B = \varnothing$ et $C = \{1\}$.

Est-ce vrai ou faux? $\{1\} \in \mathcal{P}(A)$, $\{\{1\},\{2\}\} \subset \mathcal{P}(A)$, $\varnothing \in \mathcal{P}(A)$, $\varnothing \subset \mathcal{P}(C)$, $\{\varnothing\} \subset \mathcal{P}(\varnothing)$.

CONVENTION 5 (intersection, réunion, différence)

Pour $A \subset E$ et $B \subset E$

$A \cap B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \in B\}$ est l'intersection de A et B et se lit "A inter B".

$A \cup B = \{x \in E \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$ est la réunion de A et B et se lit "A union B".

$A - B = \{x \in E \mid x \in A \text{ et } x \notin B\}$ est la différence de A et B.

Remarques

1 Ces ensembles sont donnés **en compréhension**, c'est-à-dire en énonçant une propriété caractérisant les éléments de E.

2 Si $B \subset A$, alors $A - B$ s'écrit aussi $\complement_A B$ et se lit **complémentaire** de B dans A.

Définition 13 On appelle **partition** de l'ensemble A tout ensemble de certaines parties de A qui satisfont aux conditions suivantes:

1) aucune partie n'est vide
2) les parties sont deux à deux disjointes
3) la réunion de toutes les parties est l'ensemble A.

Exercices

43 *Donner* $A \cap B$, $A \cup B$, $\complement_B A$ *(si possible),* $B - A$ *dans les cas suivants:*

a) $A = \{2, 3, 4\}$ et $B = \{2, 3, 4, 5\}$
b) $A = \{1, 2, 3, 4\}$ et $B = \{1, 2\}$
c) $A = \{1, 2, 3\}$ et $B = \varnothing$
d) $A = \mathbf{N}$ et $B = \{\varnothing\}$
e) $A = \mathbf{Z}$ et $B = \mathbf{N}$

44 *Donner différentes partitions de l'ensemble* $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

45 *Donner différentes partitions de l'ensemble des élèves de votre classe.*

46 *Démontrer que si* $A \subset E$ *et* $B \subset E$

a) $A \cap B \subset A$ et $A \cap B \subset B$

b) $A \cap A = A$

c) $A \cap \varnothing = \varnothing$

d) $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cap B = A)$

e) $A \cap B = B \cap A$ (commutativité)

f) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ (associativité)

g) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (distributivité à droite, de même à gauche)

h) $\complement_E (A \cap B) = \complement_E A \cup \complement_E B$

47 *Démontrer que si* $A \subset E$, $B \subset E$ et $C \subset E$

a) $A \subset A \cup B$ et $B \subset A \cup B$

b) $A \cup A = A$

c) $A \cup \varnothing = A$

d) $(A \subset B) \Leftrightarrow (A \cup B = B)$

e) $A \cup B = B \cup A$ (commutativité)

f) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$ (associativité)

g) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (distributivité à droite, de même à gauche)

h) $\complement_E (A \cup B) = \complement_E A \cap \complement_E B$

48 *Pour* $\{A, B, C\} \subset \mathcal{P}(E)$, *simplifier les écritures dans lesquelles on note* $\complement_E A = \overline{A}$.

a) $A \cap (\overline{A} \cup B)$ b) $A \cup (\overline{A} \cap B)$ c) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})$

d) $(A \cap B) \cup (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$ e) $(A \cup (A \cap B)) \cap B$

f) $\overline{A \cup B} \cap (\overline{A} \cup B)$ g) $(A \cap B) \cap (B \cup C)$ h) $(A \cup B) \cap (A \cup C) \cap (B \cap C)$

i) $\overline{A \cup B} \cap \overline{A \cap C}$ j) $\overline{A \cap B} \cap \overline{A \cap C} \cap \overline{C}$

THEOREME 3

Si l'on pose $\{ \{x\}, \{x, y\} \} = (x, y)$, alors $(x, y) = (a, b) \Leftrightarrow x = a$ et $y = b$.

Définition 14 (x, y) s'appelle **couple** de premier membre x et de deuxième membre y.

Définition 15 Etant donné deux ensembles A et B , on appelle **produit cartésien** de A et B l'ensemble de tous les couples dont le premier membre est élément de A et le deuxième de B.

Notation

Le produit cartésien de A par B se note $A \times B$ et se lit "A croix B".

Exercices

49 *Trouver* x, y *dans les cas suivants:*

a) $(x, 3) = (2, y)$

b) $(x - 1, 5) = (1, y + 2)$

c) $(x + y, 1) = (0, y)$

d) $(x + y, 3) = (7, x - y)$

e) $(x^2, y^2) = (9, 16)$

f) $(x^2, 1) = (0, 8)$

g) $\{x, 12\} = \{y, 5\}$

h) $(x, 12) = (y, 5)$

50 *Si* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c, d\}$ *et* $C = \{1, 2\}$, *écrire en extension* $A \times B$, $A \times C$, $C \times B$, $A \times A$ *noté aussi* A^2.

THEOREME 4

Si l'on pose $(x, y, z) = ((x, y), z)$ alors $(x, y, z) = (a, b, c) \Leftrightarrow x = a$ et $y = b$ et $z = c$.

Définition 16 (x, y, z) s'appelle **triplet**.

Exercices

51 *Trouver* x, y, z *dans les cas suivants:*

a) $(x, y, z) = (3, x, y)$

b) $(x, 4, z) = (x, x - 1, x)$

c) $(2, y - 1, z) = (y, x, 3)$

d) $\{x, 2, z\} = \{2, 5, 6\}$

e) $(x, 2, z) = (2, 5, 6)$

f) $(x - 1, y - 2, z - 3) = (3, 4, 5)$

g) $(x, 3, z - 1) = (y, y, z)$

h) $(x^2, y^2, z^2 - 1) = (4, 1, 8)$

52 *Ecrire un triplet avec des accolades.*

53 *Comment peut-on définir un quadruplet? Un n-uplet?*

54 *Par analogie à la définition 12, définir le produit cartésien de trois ensembles, de quatre ensembles, de* n *ensembles.*

55 *Si* $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{a, b, c\}$ *et* $C = \{1, 2\}$, *déterminer* $A \times B \times C$, $C \times C \times C$ *noté aussi* C^3.